Übungen

Abgabetermin: Freitag 9.7. 10Uhr, Briefkästen 41, 42, 43 und 46
THEMEN: 0-1-Gesetze und Konvergenzarten

Aufgabe 44 (5 Punkte)
Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger, $\mathcal{N}(n,\sigma^2)$-verteilter Zufallsgrößen, $n \in \mathbb{N}, \sigma^2 > 0$.

a) Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{R}$ stets $P(\{\limsup_{n\to\infty} X_n < a\}) \in \{0,1\}$ gilt.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X_n > n$ für fast alle $n \in \mathbb{N})$ und $P(X_n < n$ für fast alle $n \in \mathbb{N})$.

Aufgabe 45 (3 Punkte)
An einem Gewinnspiel nehmen in der n-ten Runde n^2 Personen teil, von denen jede 1 € einsetzt. Jeder hat die gleiche Gewinnwahrscheinlichkeit und der Gewinner bekommt den gesamten Einsatz von n^2 € ausgezahlt. Zusätzlich subventioniert der Staat den Gewinner durch einen nochmaligen Betrag in Höhe von n €. Zeigen Sie:

a) Der erwartete Gewinn eines Spielers beträgt in jeder Runde mindestens 1 €.

b) Jeder Spieler geht auf lange Sicht fast sicher bankrott, d.h. der Gewinn eines Spielers konvergiert für $n \to \infty$ fast sicher gegen 0.

Aufgabe 46 (6 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsgrößen mit $EX_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

a) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} 0 \implies \frac{1}{n}X_n \xrightarrow{P} 0$.

b) $EX_n^4 < c$ für ein $c \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N} \implies \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \to 0$ P-f.s.

Aufgabe 47 (6 Punkte)
Es $(\Omega, \mathfrak{A}, P) = ([0,1), \mathfrak{B}_{[0,1)}, \lambda\!\!\!\lambda_{[0,1)})$. Untersuchen Sie folgende Folgen von Zufallsgrößen auf Konvergenz in Wahrscheinlichkeit, fast sichere Konvergenz und Konvergenz im p-ten Mittel, $p > 0$:

a) $X_n = n^2 \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n})}$

b) $X_n = (-1)^n(\frac{1}{2} - \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2})})$

c) $X_1^1, X_2^1, X_2^2, X_3^1, X_3^2, X_3^3, X_4^1, \ldots$
mit $X_n^i := \mathbb{1}_{A_n^i}$ und $A_n^i := \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right)$ für alle $1 \le i \le n$ und $n \in \mathbb{N}$.